2.3. Понятие непрерывности функции

План

1. Непрерывная функция в точке. Точки разрыва
2. Непрерывная функция в точке справа/слева
3. Непрерывная функция на множестве
4. Неубывающая (невозрастающая) функция. Монотонные функции
5. Возрастающая (убывающая) функция. Строго монотонные функции
6. Обратная функция
7. Теорема о непрерывности суммы (разности), произведения и частного двух функций
8. Лемма о непрерывности строго монотонной функции

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a, если предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Таким образом, для непрерывной функции символ «lim» и символ «f» можно менять местами: $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа (слева) в точке** a, если правый (левый) предел этой функции в точке a существует и равен $f(a)$:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad f(a+0) = f(a),$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0) = f(a).$$

Замечание. Если $f(x)$ непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в этой точке. В самом деле, в силу замечания из раздела 2.1 в этом случае существует предел данной функции в точке a, равный частному значению $f(a)$.

Пример. Так как полиномы и несократимые алгебраические дроби имеют в каждой точке области задания предел, равный их частному значению, то они являются непрерывными.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются **точками разрыва функции**.

Примером служит функция:

$$y = \operatorname{sgn} x = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

которая имеет разрыв в точке $a = 0$, так как правый и левый пределы функции в точке $x = 0$ существуют, но не равны друг другу.

Функция $f(x)$ **непрерывна на множестве** $\{x\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке интервала, то говорят, что она **непрерывна на интервале**. Если функция непрерывна в каждой точке сегмента $[a,b]$, в том числе и в точках a и b, то говорят, что она **непрерывна на сегменте (отрезке)** $[a,b]$.

Теорема 2.2. Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ непрерывны в точке a (частное при условии $g(a) \neq 0$).

Доказательство. Так как непрерывные в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы $f(a)$ и $g(a)$, то в силу теоремы 2.1 пределы функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ существуют и равны соответственно $f(a) \pm g(a)$, $f(a) \cdot g(a)$ и $f(a)/g(a)$. Но эти величины как раз и представляют собой частные значения перечисленных функций в точке a. Теорема доказана.

2.4. Монотонные и обратные функции

Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** (**невозрастающей**) на множестве $\{x\}$, если для любых $x_1, x_2 \in \{x\}$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \big(f(x_1) \geq f(x_2)\big).$$

Неубывающие и невозрастающие функции объединяются общим термином: **монотонные функции**.

Если для любых $x_1, x_2 \in \{x\}$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$, то функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на множестве $\{x\}$. Возрастающие и убывающие функции называются **строго монотонными**. Примеры:

1) Функция $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$ является возрастающей на $(-\infty, \infty)$.

2) Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ является неубывающей на $(-\infty, \infty)$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на $[a,b]$, а множеством значений y этой функции является $[\alpha, \beta]$. Пусть, далее, каждому $y \in [\alpha, \beta]$ соответствует только одно значение $x \in [a,b]$, для которого $y = f(x)$. Тогда на $[a,b]$ можно определить функцию $x = f^{-1}(y)$, ставя в соответствие каждому $y \in [\alpha, \beta]$ то значение $x \in [a,b]$, для которого $f(x) = y$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется **обратной** для функция $y = f(x)$.

В условиях определения обратной функции очевидно, что $y = f(x)$ является обратной функцией для функции $x = f^{-1}(y)$, поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются **взаимно обратными**.

Взаимно обратные функции обладают следующими свойствами:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad f^{-1}(f(x)) = x,$$
то есть символы f и f^{-1} можно рассматривать как операторы.

Лемма 2.1. Для того чтобы строго монотонная на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ являлась непрерывной на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы любое число γ, заключённое между числами $\alpha = f(a)$ и $\beta = f(b)$, было значением этой функции.

Доказательство. 1) Необходимость. Ради определённости рассмотрим возрастающую непрерывную на $[a, b]$ функцию $y = f(x)$. Покажем, что если $\alpha < \gamma < \beta$, то существует внутренняя точка c сегмента $[a, b]$, в которой $f(c) = \gamma$. В силу возрастания функции $f(x)$ на $[a, b]$ такая точка c будет единственной. Обозначим через $\{x\}$ множество точек $[a, b]$, для которых $f(x) \leq \gamma$. Множество $\{x\}$ ограничено сверху и поэтому имеет точную верхнюю грань c. Докажем, что $f(c) = \gamma$.

Отметим, что любое число из $[a, b]$, меньшее c, принадлежит $\{x\}$, ибо по определению точной верхней грани для всех $x < c$ существует число $x' \in \{x\}$ такое, что $x < x'$ и $f(x') \leq \gamma$, но тогда из возрастания $f(x)$ следует, что и $f(x) \leq \gamma$, то есть $x \in \{x\}$. Любое число, превосходящее c, не принадлежит $\{x\}$ по определению точной верхней грани.

Покажем, что c – внутренняя точка сегмента $[a, b]$. В самом деле, пусть, например, $c = b$. Рассмотрим сходящуюся к b возрастающую ЧП $\{x_n\}$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке b слева, то $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. С другой стороны, $f(x_n) \leq \gamma$, так как все $x_n < c$ и, значит, принадлежат $\{x\}$, поэтому по теореме 1.13 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \gamma$. Таким образом, $\beta \leq \gamma$, что противоречит условию $\gamma < \beta$. Полученное противоречие доказывает, что $c < b$. Аналогично можно убедиться, что $a < c$.

Так как c – внутренняя точка $[a, b]$, то найдутся возрастающая $\{x_n'\}$ и убывающая $\{x_n''\}$ ЧП, сходящиеся к точке c. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке c, то
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c).$$
Но $f(x_n') \leq \gamma$, а $f(x_n'') > \gamma$, так как $x_n' < c < x_n''$ $(\forall n)$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} f(x_n') \leq \gamma$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n'') \geq \gamma$, откуда следует, что $f(c) = \gamma$.

2) Достаточность. Проведём доказательство для возрастающей на $[a, b]$ функции $f(x)$. Пусть c – любая точка $[a, b]$ и $\gamma = f(c)$.

Убедимся, что число γ является правым и левым пределом $f(x)$ в точке c (если c – граничная точка $[a, b]$, то γ является соответствующим односторонним пределом в этой граничной точке). Пусть $a < c \leq b$;

докажем, что γ является левым пределом $f(x)$ в точке c. Пусть ε – столь малое положительное число, что $\alpha < \gamma - \varepsilon$ (см. рис. 2.1).

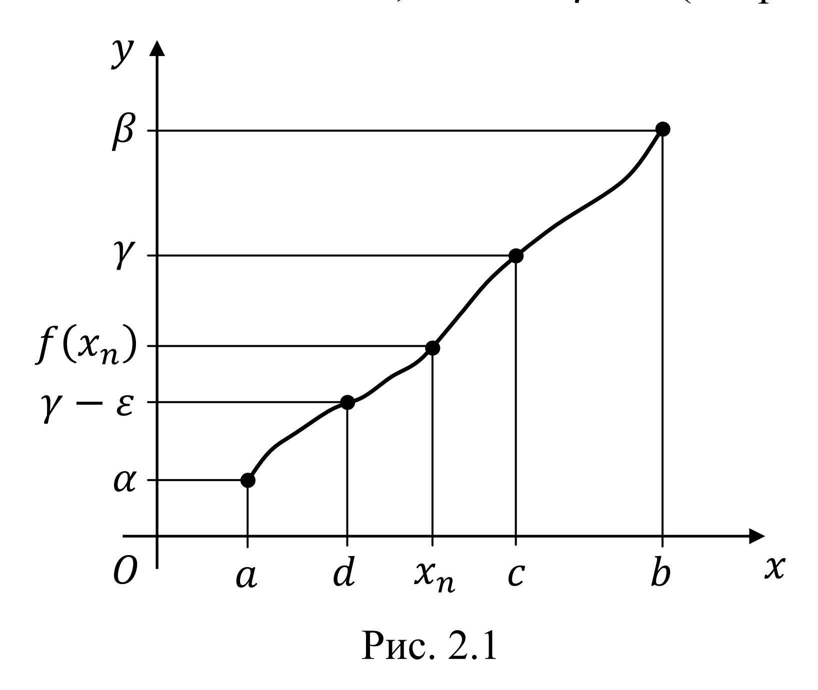


Рис. 2.1

Поскольку по условию леммы $\gamma - \varepsilon$ является значением $f(x)$, то на $[a, b]$ можно указать точку d такую, что $f(d) = \gamma - \varepsilon$. Так как $f(x)$ возрастает, то $d < c$. Рассмотрим теперь любую сходящуюся к точке c ЧП $\{x_n\}$, элементы которой меньше c. Для $n \geq N(c - d)$ все элементы x_n удовлетворяют неравенствам $d < x_n < c$, так что в силу возрастания $f(x)$ справедливы неравенства $f(d) < f(x_n) < f(c)$. Так как $f(d) = \gamma - \varepsilon$ и $f(c) = \gamma$, то из последних неравенств вытекает, что при $n \geq N(c - d)$ должны выполняться неравенства $0 < \gamma - f(x_n) < \varepsilon$. Иными словами, ЧП $\{f(x_n)\}$ сходится к γ, а поскольку $\{x_n\}$ – произвольная сходящаяся к точке c ЧП, то тем самым доказано, что левый предел функции $f(x)$ в точке c существует и равен $\gamma = f(c)$.

Если $a \leq c < b$, то, рассуждая аналогично, можно доказать, что значение $\gamma = f(c)$ является правым пределом в точке c. Итак доказано, что правый и левый пределы функции $f(x)$ существуют и равны между собой для всех внутренних точек c её частному значению $f(c)$, а это и означает непрерывность $f(x)$ во внутренних точках $[a, b]$. Непрерывность в граничных точках $[a, b]$ следует из того, что соответствующие односторонние пределы $f(x)$ в точках a и b равны частным значениям функции. Лемма доказана.

Следствие. Пусть на $[a, b]$ задана строго монотонная непрерывная функция $y = f(x)$, и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда функция $f(x)$

имеет на $[\alpha,\beta]$ строго монотонную и непрерывную обратную функцию $x=f^{-1}(y)$.

Доказательство. В силу леммы 2.1 множеством значений функции $y=f(x)$ является сегмент $[\alpha,\beta]$. Тогда на сегменте $[\alpha,\beta]$ существует обратная строго монотонная функция $x=f^{-1}(y)$, множеством значений которой является отрезок $[a,b]$ и которая по лемме 2.1 непрерывна на сегменте $[\alpha,\beta]$. Следствие доказано.

Замечание. Монотонные функции имеют правый и левый пределы в каждой внутренней точке области задания.

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 656 с.